$= R\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$

$\cdot \vec{e_A} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \dfrac{R(\cos\varphi + 1)\vec{e_R} - R\sin\varphi\,\vec{e_y}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$

donc : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

$= P_R\vec{e_R} + P_\varphi\vec{e_\varphi} + T_R\vec{e_R} + T_\varphi\vec{e_\varphi} + R\vec{e_R}$

$= (P_R + T_R + R)\vec{e_R} + (P_\varphi + T_\varphi)\vec{e_\varphi}$

$= m\left(R\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - R\dot{\varphi}^2\vec{e_R}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} P_R + T_R + R = -mR\dot{\varphi}^2 \\ P_\varphi + T_\varphi = mR\ddot{\varphi} \end{cases}$

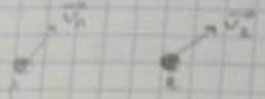
$\Rightarrow$

Chap. Les Chocs.

I - Définitions

On appelle choc ou collision entre deux particules, toute interaction qui entraîne une variation brusque et finie des vecteurs vitesses des deux particules pendant un temps très bref.

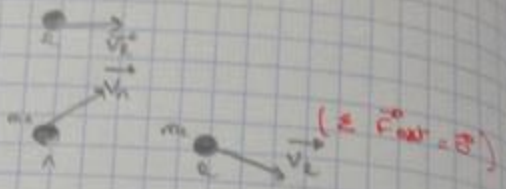
Avant le choc :



Choc :

Après le choc :

* système de deux particules.



($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$)

II - Conservation de la quantité du mouvement.

$\vec{p}$ (système) $= m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} =$ cste

Donc avant le choc, $m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = \vec{p}_{sys} = \vec{cste}$

Après le choc, $m_1 \vec{v_1}' + m_2 \vec{v_2}' = \vec{p}_{sys} = \vec{cste}$.

⇒ La quantité de mouvement se conserve avant et après le choc.

Conservation de la quantité de mouvement.

$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m_1 \vec{v_1}' + m_2 \vec{v_2}'$ (1)

III - Choc élastique

Un choc élastique si l'énergie cinétique est conservé.

Avant le choc :

$$Ec_{syst} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Après le choc :

$$Ec'_{syst} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

• Choc élastique :

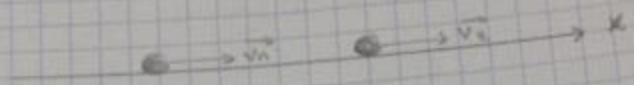
$\Rightarrow \Delta E_c$ (Avant et après) $\Leftrightarrow E_{c\,syst} = E_{c\,syst}'$

$\Leftrightarrow m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$. (2)

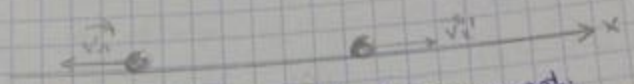
Exemple : $\vec{v_1} = v_1 \vec{e_x}$ $\quad \vec{v_1}' = v_1' \vec{e_x}$

$\vec{v_2} = v_2 \vec{e_x}$ $\quad \vec{v_2}' = v_2' \vec{e_x}$.

• Avant le choc :



• Après le choc :



Conservation de la quantité de mouvement.

$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m_1 \vec{v_1}' + m_2 \vec{v_2}'$ (1)

Le choc est élastique :

$m_1 \vec{v_1}^2 + m_2 \vec{v_2}^2 = m_1 \vec{v_1}'^2 + m_2 \vec{v_2}'^2$ (2)

$m_1 (\vec{v_1}^2 - \vec{v_1}'^2) = m_2 (\vec{v_2}'^2 - \vec{v_2}^2)$

$m_1 (\vec{v_1} - \vec{v_1}')(\vec{v_1} + \vec{v_1}') = m_2 (\vec{v_2}' - \vec{v_2})(\vec{v_2}' + \vec{v_2})$ (2)

(2)/(1) $\Leftrightarrow \vec{v_1} + \vec{v_1}' = v_2' + \vec{v_2}$ (3)

(1)-(3) $\Leftrightarrow$: $\vec{V_1}' = \dfrac{(m_1 - m_2)\vec{V_1} + 2 m_2 \vec{V_2}}{m_1 + m_2}$

$\vec{V_2}' = \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{V_2} + 2 m_1 \vec{V_1}}{m_1 + m_2}$.

• Si $m_1 = m_2 = m$.

$\vec{V_1}' = \vec{V_2}$

$\vec{V_2}' = \vec{V_1}$

• Si $\vec{V_1} = \vec{0}$

$\vec{V_1}' = \dfrac{2 m_2 V_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{V_2}' \quad \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{V_2}}{m_1 + m_2}$.

II - Chocs inélastiques.

Dans ce cas là, la quantité de mouvement est conservée mais l'énergie cinétique ne l'est pas.

Avant le choc :
$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1}^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2}^{\,2}.$$

Après le choc :
$$E_c' = \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1}'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2}'^{\,2}$$

$$E_c = E_c' + U.$$

* Si $U > 0$: le système cède de l'énergie ~~(cinétique)~~.
* Si $U < 0$: le système absorbe de l'énergie.

III - Le choc mou

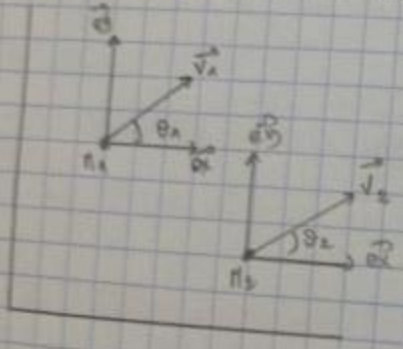
Si après le choc les particules m_1 et m_2 constituent une seule masse (m_1+m_2) de vitesse $\vec{V}$, alors le choc est mou, et la conservation de la quantité du mouvement s'écrit :

$$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = (m_1+m_2)\vec{V}.$$

Ex d'app.

- Choc élastique en 2D. -

$\vec{v_1} \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v_2} \begin{pmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \end{pmatrix}$



$$v_1 = \|\vec{v_1}\|.$$
$$\vec{v_1} = v_1 (\cos\theta_1 \vec{e_x} + \sin\theta_1 \vec{e_y})$$
$$v_2 = \|\vec{v_2}\|.$$
$$\vec{v_2} = v_2 (\cos\theta_2 \vec{e_x} + \sin\theta_2 \vec{e_y}).$$

Conservation de la quantité du mouvement

① $m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v_1' \cos\theta_1' + m_2 v_2' \cos\theta_2'$

② $m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 = m_1 v_1' \sin\theta_1' + m_2 v_2' \sin\theta_2'$

- Conservation de l'énergie cinétique.

$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$

On a 4 inconnues $(v_1', v_2', \theta_1', \theta_2')$

⇒ Trouvez v_1' et v_2' en fonction de $v_1, v_2, m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$ et θ_1'/θ_2'. En déduire la 4ème équation du système.

Mécanique du point :

- CHap I des outils mathématique (Voir le cours d'électrostatique.

I - Introduction.

- la mécanique : est les sciences qui étudie le mouvement

Dans ce cours on va s'intéresser à la mécanique du point matériel

- le point matériel est définie mathématiquement comme étant un point de l'espace, de dimension nulle. En mécanique, le point M matériel, est tout corps dont la position est parfaitement définie par la connaissance d'un point de l'espace.

II. Hypothèse de la mécanique du point

- La masse du point matériel ne dépend que de la quantité de matière qui le compose $m = \rho.V$ (même si le volume du point égale à 0).

Limite de la mécanique du point.

- Si le système du point matériel est très petit (1 µm) mécanique quantique.
- Si le système est très grand (mécanique du solide).
- La vitesse est très grande (proche de la vitesse de la lumière). Mécanique relativiste.

III. Cinématique du point matériel.

est l'étude du point matériel sans tenir compte des causes du mouvement.

1 - Référentiel

Pour suivre un point M dans son mouvement à chaque instant t, on introduit les notions de référentiel et d'observateur.

Le référentiel est un système d'axes de coordonnées liées à l'observateur qui représente l'axe du temps.

.. Référentiel de Copernic.

C'est un référentiel dont l'origine est le barycentre du système solaire et dont les 3 axes sont dirigés vers les 3 étoiles lointaines fixes.

.. Référentiel Galilien.

Tout référentiel qui a un mouvement de translation par rapport au référentiel de copernic.

.. Repère du temps

En mécanique classique le temps est représenté par un scalaire. L'origine du temps est donnée par le début du mouvement ou l'observateur. Le temps ne peut jamais être négatif.

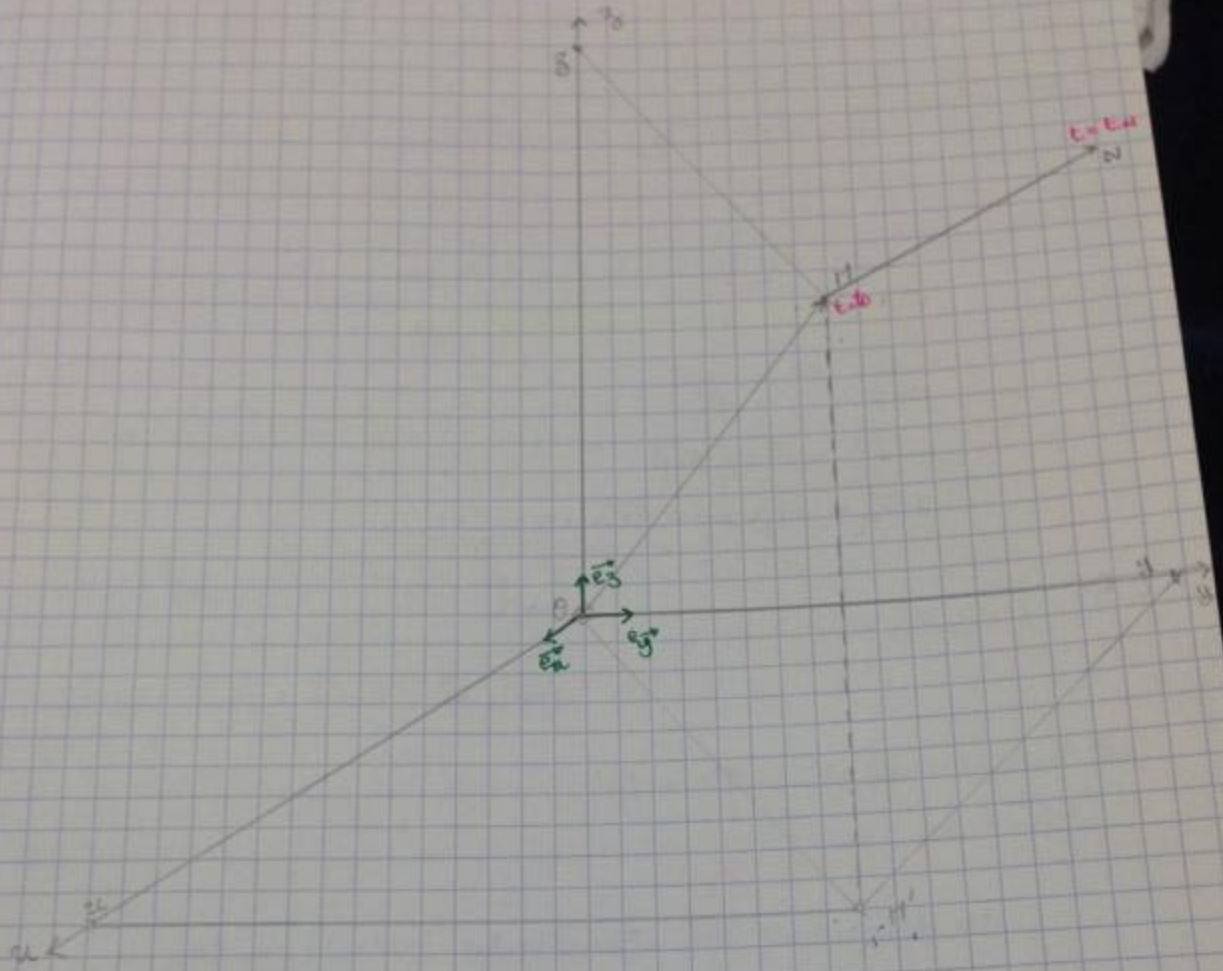
.. Le repère

. Un repère c'est un système de coordonnée constitué par une origine et 3 axes non colinéaires et d'une base de 3 vecteurs associés aux 3 axes

. Un repère orthonormé est un repère dont les axes sont perpendiculaires les uns par rapports aux autres et les 3 vecteurs sont unitaire.

II- Cinématique dans le repère cartésien.

Cinématique dans le repère cartésien c'est un repère orthonormé constitué par 3 vecteurs unitaire: $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, c'est 3 vecteurs sont fixes



1 - Vecteur position :

Le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (liant l'origine du repère O, et le point matériel étudié M)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{H'M}$$

H' est la projection de M dans le plan (O, x, y).

$\overrightarrow{H'M} = z\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{OH'} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}$$

2. Vecteur déplacement.

$\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{ON}$

$= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OH}$

$= (x_N \vec{e_x} + y_N \vec{e_y} + z_N \vec{e_z}) - (x_H \vec{e_x} + y_H \vec{e_y} + z_H \vec{e_z})$

$= (x_N - x_H)\vec{e_x} + (y_N - y_H)\vec{e_y} + (z_N - z_H)\vec{e_z}$

- Si N est très proche de H (N le plus proche voisins)

$\overrightarrow{HN}$ est un déplacement élémentaire

- $\lim_{N \to H} \overrightarrow{NH} = \overrightarrow{dOH}$

$= \overrightarrow{dl}$

$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{dOH}$.

$\overrightarrow{dOH} = d(x.\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z})$

$= dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z} + x\,d\vec{e_x} + y\,d\vec{e_y} + z\,d\vec{e_z}$

$(\vec{e_x}; \vec{e_y}; \vec{e_z})$ sont fixes $\Rightarrow \overrightarrow{dOH} = dx.\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$.

$\overrightarrow{dOH} = \overrightarrow{dl} = dx\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

$(fg)' = f'g + fg'$

3. Vecteur vitesse.

Un déplacement $\overrightarrow{HN}$ s'est effectué pendant $(t_N - t_H)$.

Si $N \longrightarrow H$ alors $t_N \longrightarrow t_H$.

et donc le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'est effectué pendant dt

$\vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{dOH}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{l}}{\partial t} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OH}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}\right]$.

$= \dfrac{\partial x}{\partial t}\vec{e_x} + \dfrac{\partial y}{\partial t}\vec{e_y} + \dfrac{\partial z}{\partial t}\vec{e_z}$

La base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est fixe

$\vec{V}(H/R(O;x;y;z)) = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$

La vitesse du point H dans le repère $R(O;x;y;z)$ est la dérivé du vecteur position dans ce même repère par rapport au temps

$\vec{V}(H/R(O;x;y;z)) = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$.

statique est le terme utilisé en mécanique = fixe stable

$$\vec{V} = \frac{\vec{MN}}{\Delta t}$$

Si M est très proche de N, alors $\vec{V} = \lim_{M \to N} \frac{\vec{MN}}{\Delta t} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$.

4- L'accélération :

Le vecteur accélération nous renseigne sur la variation de la vitesse en fonction du temps. On le note $\vec{\gamma}$ et $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}.$$

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}; \vec{e_z})$ fixe dans R.

$$\vec{a}\left(M/_{R(O;x;y;z)}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z}.$$

$$\ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}.$$

$$\vec{OM} \xrightarrow{d/dt} \vec{v} \xrightarrow{d/dt} \vec{a}$$

$$\int \qquad \int$$

5- Trajectoire :

La trajectoire est une courbe dans l'espace qui rassemble tout les points que le point M a occupé lors de son déplacement en fonction du temps.

$$\vec{OM}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

On annule le temps entre x, y; z et on exprime z(x; y) est la trajectoire)

• Exercice d'application : (A refaire) résultat $\pi/4$

Les coordonnées d'un module dans un repère (O, x; y; z) sont données par :

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \alpha t^3 - 3\gamma t \\ y(t) = -3\beta t^2 \\ z(t) = \alpha t^3 + 3\gamma t. \end{cases}$$

1 - Étudier la cinématique.

2 - Montrez que la vitesse $\vec{V}$ fait un angle constant avec $\vec{e_z}$

Donnez cette angle.

- Solution :

1 - Méthodologie :

- Système étudié $M(x(t), y(t); z(t))$

- Repère :
  - Référentiel : Référentiel Galélien. - R_G -
  - Base de repère : $(\vec{e_x}, \vec{e_y}; \vec{e_z})$ est fixe.
  - Mouvement en 3D

- vecteur position :

$$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}.$$

- Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$$

$$\vec{V}\begin{pmatrix} 3\alpha t^2 - 3\gamma \\ -\beta \\ 3\alpha t^2 + 3\gamma \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}.$$

- L'accélération :

$$\vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})} = \begin{pmatrix} 6\alpha t \\ 6\alpha t \end{pmatrix}$$

- Trajectoire :

On prend $\alpha = \gamma = \beta = 1$.

$$\Rightarrow \vec{OM}\begin{pmatrix} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = -3t^2 \\ z(t) = t^3 + 3t \end{pmatrix}$$

$z(x, y)$

x	$z(y) = x - 2y$
0	$-2y$
1	$1 - 2y$
2	$2 - 2y$
⋮	⋮

$$x - z = -6t = +2(-3t)$$

$$\Rightarrow x - z = 2y$$

$$\Rightarrow z = x - 2y.$$

Chaque équation me permet de résoudre un inconnu

= la trajectoire bach 2wina

2- On doit trouver $(\widehat{\vec{v}, \vec{oz}})$ est un angle constant.

$(\vec{v}, \vec{oz})$ est un angle constant.

$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{oz}})$ et $\sin(\vec{v}, \vec{oz})$ (On peut les trouver)

$\Rightarrow tg(\widehat{\vec{v}, \vec{oz}})$ est une constante $= \dfrac{\sin(\vec{v}, \vec{oz})}{\cos(\vec{v}, \vec{oz})}$

$\vec{v} \cdot \vec{e_z} = \|\vec{v}\| \|\vec{e_z}\| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{e_z})$

$\vec{v} \wedge \vec{e_z} = \|\vec{v}\| \|\vec{e_z}\| \sin(\vec{v}, \vec{e_z}) \cdot \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{e_z}}{\|\vec{v} \wedge \vec{e_z}\|}$ vecteur unitaire

$= \dfrac{\|\vec{v} \wedge \vec{e_z}\|}{\vec{v} \cdot \vec{e_z}}$

Rappel Mathématique.

. Produit scalaire.

$\vec{a} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$

Le résultat est un scalaire (nombre)

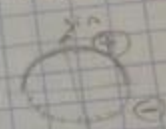
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}$

so : $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} + \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$



. Produit vectoriel. ← vecteur unitaire et le vecteur même sens ⟺ produit vectoriel (+)

Le résultat est un vecteur Attention.

$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b}} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$= \underbrace{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})}_{= \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} \cdot \dfrac{\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b}}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$ ← vecteur unitaire.

$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$= \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2} \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \right\|_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}$

$= \left\| \begin{pmatrix} y_a x_b - y_b x_a \\ z_a x_b - z_b x_a \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \right\|$

$$= \sqrt{(y_a z_b - y_b z_a)^2 + (z_a x_b - x_a z_b)^2 + (x_a y_b - y_a x_b)^2}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 3t^2 - 3 \\ -3 \\ 3t^2 + 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(3t^2-3)^2 + 9t^4 + (3t^2+3)^2}$$

$$= \sqrt{9t^4 + 9 - 18t^2 + 9t^4 + 9t^4 + 9 + 18t^2}$$

$$= \sqrt{9(2t^4 + 2)}$$

$$= 3\sqrt{(2t^4 + 3)}$$

- $\cos(\vec{v}, \vec{e_3}) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{e_3}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{e_3}\|}$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \vec{e_3} = v_z$$

$$= \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

- $\sin(\vec{v}, \vec{e_3}) = \dfrac{\|\vec{v} \wedge \vec{e_3}\|}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$

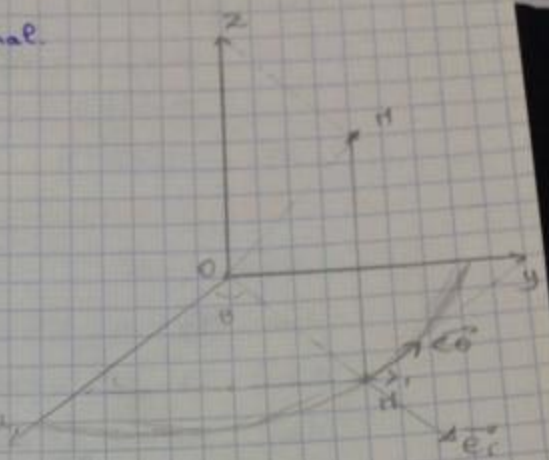
V - Cinématique dans le repère cylindrique.

3 mouvements : R : radial
θ : angulaire
z : longitudinal.

$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\vec{OM} = \vec{OM'} + z\vec{e_z}$

$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$



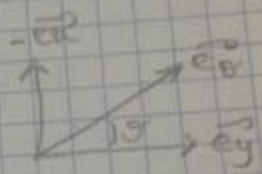
$\vec{e_R}$: définie le rayon sur lequel se trouve le point M.

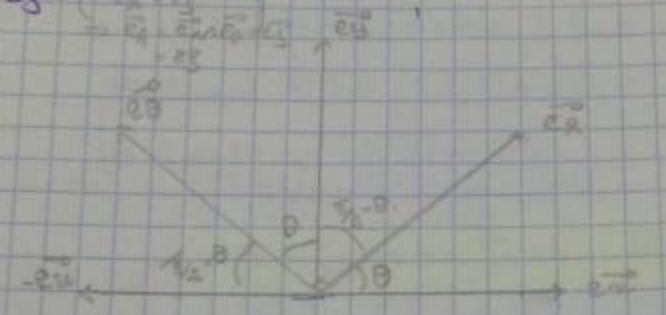
Méthode graphique :

- $\begin{pmatrix} R \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = (\vec{e_R}; \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\vec{e_R}(x,y)\vec{e_R} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$ / $\vec{e_\theta}(x,y) = \vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x}$. ($\vec{e_\theta}$ sens positive par rapport au cens trigonométrique)

- $\vec{e_z} = \vec{e_z}$ ($\vec{e_R} = \vec{e_z}$; $\vec{e_R} = \vec{e_x} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_y}$; $= \vec{e_z}$)





Méthode analytique :

$$\frac{\partial \vec{e_R}}{\partial \theta} = \frac{\partial \cos\theta}{\partial \theta}\cdot\vec{e_x} + \frac{\partial \sin\theta}{\partial \theta}\vec{e_y}$$

$$= -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y} = \vec{e_\theta}$$

$$\vec{e_z} = \vec{e_R} \wedge \vec{e_\theta}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\vec{e_x},\vec{e_y};\vec{e_z})}$$

1 - Vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{On'} + \overrightarrow{n'n}$

$= R\,\vec{e}_R + z\,\vec{e}_z$

$= x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

$R = \|\overrightarrow{On'}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

2 - Vecteur déplacement Elementaire.

$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dl}$

dans (O, x, y, z).

$d\overrightarrow{On} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$

dans (O, R, θ, z) : $d\overrightarrow{On} = d[R\vec{e}_R + z\vec{e}_z]$

$d\overrightarrow{On} = d[R\vec{e}_R] + d[z\vec{e}_z]$

$d\overrightarrow{On} = dR\,\vec{e}_R + R\,d\vec{e}_R + dz\,\vec{e}_z$

$d\vec{e}_R = d(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$

$= -d(\cos\theta)\,\vec{e}_x + d(\sin\theta)\,\vec{e}_y$

$= -d\theta\sin\theta\,\vec{e}_x + d\theta\cos\theta\,\vec{e}_y$

$= d\theta(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y) = d\theta\,\vec{e}_\theta$

donc : $\boxed{d\overrightarrow{On} = dR\,\vec{e}_R + R\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z}$

3 - Vitesse :

$\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$= \dfrac{dR}{dt}\vec{e}_R + R\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \dfrac{dz}{dt}\vec{e}_z$

$\vec{V}(M/(O,R,\theta,z)) = R'\vec{e}_R + R\theta'\vec{e}_\theta + z'\vec{e}_z$

4 - Vecteur accélération :

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

$\vec{V}\begin{pmatrix} R' \\ R\theta' \\ z' \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{d}{dt}[R'\vec{e}_R + R\theta'\vec{e}_\theta + z'\vec{e}_z]$

$$\vec{a} = R''\vec{e_R} + R'\frac{d\vec{e_R}}{dt} + R'\theta'\vec{e_\theta} + R\theta''\vec{e_\theta} + R\theta'\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + z''\vec{e_z}$$

$$\frac{d\vec{e_R}}{dt} = \frac{d\vec{e_R}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \theta'\vec{e_\theta} \text{ et } \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\theta'\vec{e_R}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}$$

$$= \theta' \times \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}$$

$$= \theta' \frac{d}{d\theta}\left[-\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}\right]$$

$$= \theta'\left(-\cos\theta\,\vec{e_x} - \sin\theta\,\vec{e_y}\right)$$

$$= -\theta'\vec{e_R}.$$

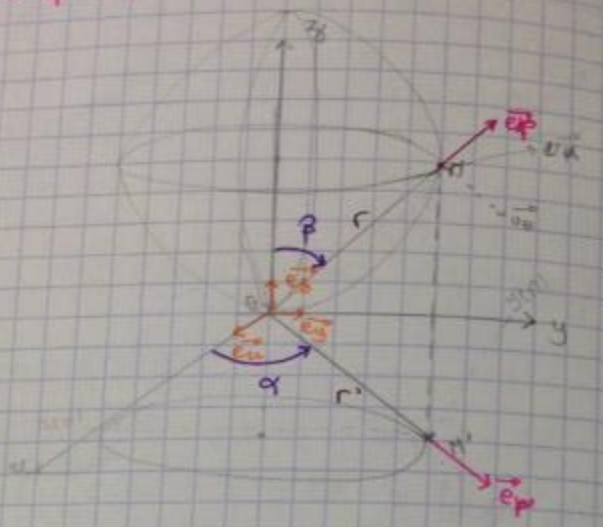
on a : $(M/O, R, \theta, z) = \vec{a} = \begin{pmatrix} R'' - R\dot{\theta}^2 \\ R\theta'' + 2R'\theta' \\ z'' \end{pmatrix}$

$$\vec{a} = R''\vec{e_R} + R'\theta'\vec{e_\theta} + R'\theta'\vec{e_\theta} + R\theta''\vec{e_\theta} - R\theta'\theta'\vec{e_R} + z''\vec{e_z}$$

$$\vec{a} = (R'' - R\dot{\theta}^2)\vec{e_R} + (2R'\theta' + R\theta'')\vec{e_\theta} + z''\vec{e_z}$$

Chap II. Cinématique du point Matériel.

Repère sphérique:



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{H'M}$

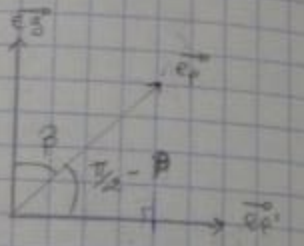
$= x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\overrightarrow{OH'} = \rho' \vec{e_{\rho'}}$

$\vec{e_{\rho'}} = \cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}$

$x = \rho' \cos\alpha$

$y = \rho' \sin\alpha$



- $\vec{e_\rho} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \vec{e_{\rho'}} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \vec{e_z}$

$= \sin\beta\, \vec{e_{\rho'}} + \cos\beta\, \vec{e_z}$

$= \sin\beta \left[\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}\right] + \cos\beta\, \vec{e_z}$

$\overrightarrow{OM} = \rho \left[\sin\beta\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\beta\sin\alpha\, \vec{e_y} + \cos\beta\, \vec{e_z}\right]$

$= x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

avec $x = \rho \sin\beta\cos\alpha$

$y = \rho \sin\beta \sin\alpha$

$z = \rho\cos\beta$

$\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OH'})$

$\beta = (\vec{Oz}, \vec{OM})$

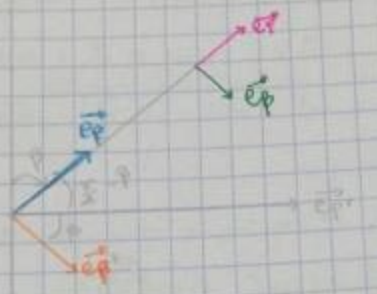
$\vec{e_\varphi} = \sin\beta\,[\cos\alpha\,\vec{e_x} + \sin\alpha\,\vec{e_y}] + \cos\beta\,\vec{e_z}$

On a deux rotations, une rotation dans le plan (O, x, y) d'angle $\alpha = (\widehat{O\vec{x}, O\vec{H}'})$ et l'autre rotation dans le plan $(\vec{Oz}, \vec{OH})$ d'angle $\beta = (\widehat{O\vec{z}, \vec{OH}})$

Mouvement sphérique :

- Mouvement radial suivant $\vec{e_r}$
- Rotation dans le plan parallèle (Ox, Oy).
- Rotation dans le plan perpendiculaire à (Ox, Oy)

La première rotation celle de β, et la deuxième celle de α.



de deuxième vecteur de la base est obtenu par une rotation $\frac{\pi}{2}$ de $\vec{e_\varphi}$ dans le sens de β dans le plan (Oz, OH)

$$\vec{e_\beta} = \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\beta} = \frac{d}{d\beta}\left[\sin\beta(\cos\alpha\,\vec{e_x} + \sin\alpha\,\vec{e_y}) + \cos\beta\,\vec{e_z}\right]$$

$$\vec{e_\beta} = \cos\beta(\cos\alpha\,\vec{e_x} + \sin\alpha\,\vec{e_y}) - \sin\beta\,\vec{e_z}$$

$$\vec{e_\alpha} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin^2\beta\sin\alpha - \cos^2\beta\sin\alpha \\ \cos^2\beta\cos\alpha - \sin^2\beta\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le troisième vecteur de la base est

$-\vec{e_\varphi} = -\sin\alpha\, \vec{e_x} + \cos\alpha\, \vec{e_y}$

Le repère sphérique est un repère relatif au mouvement d'un point M dans une sphère. Ce mouvement est composé d'un mouvement de déplacement radial, d'une rotation /(oz) et une 2ème rotation dans le plan $(O,x,y) \perp (Oz)$

Le repère est muni de la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\beta}, \vec{e_\alpha})$ Voir schéma

- $\vec{e_\rho} = \sin\beta(\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}) + \cos\beta\, \vec{e_z}$
- $\vec{e_\beta} = \cos\beta[\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}) + \sin\beta \vec{e_z}$
- $\vec{e_\alpha} = -\sin\alpha\, \vec{e_x} + \cos\alpha\, \vec{e_y}$.

Ces trois vecteurs sont mobiles

Pour un tel mvt il est préférable de travailler dans le repère sphérique.

- Cinématique dans le repère sphérique.

1 - Vecteur position :

$\vec{OM} = \rho\, \vec{e_\rho}$

$\rho = \| \vec{OM} \|$

2 - Vecteur déplacement élémentaire :

$d\vec{\ell} = d\vec{OM}$

$d\vec{OM} = d(\rho\, \vec{e_\rho})$

$= d\rho\, \vec{e_\rho} + \rho\, d\vec{e_\rho}$

$d\vec{e_\rho}(\alpha,\beta) = \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \beta} d\beta$

$\vec{e_\rho} = \sin\beta[\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}] + \cos\beta\, \vec{e_z}$.

$\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \beta} = \vec{e_\beta}$

$\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \alpha} = \sin\beta\, \vec{e_\alpha}$

$$d\vec{e_\rho}(\alpha,\beta) = \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \beta} d\beta$$

$$= \sin\beta \vec{e_\alpha}\, d\alpha + \vec{e_\beta} d\beta$$

$$= d\alpha \sin\beta \vec{e_\alpha} + d\beta \vec{e_\beta}$$

$$\vec{dl} = d\vec{OM} = d\rho \vec{e_\rho} + \rho d\beta \vec{e_\beta} + \rho d\alpha \sin\beta \vec{e_\alpha}$$

3. Vecteur vitesse:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho \vec{e_\rho} + \rho d\beta \vec{e_\beta} + \rho d\alpha \sin\beta \vec{e_\alpha})}{dt}$$

$$= \dot{\rho} \vec{e_\rho} + \rho \sin\beta \dot{\alpha} \vec{e_\alpha} + \rho \dot{\beta} \vec{e_\beta}.$$

4. Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} =$$

5. Trajectoire:

A partir des équations horaire.

$\rho(t)$

$\beta(t)$

$\alpha(t)$

On élimine le temps entre les 3 variable et on trace $\rho(\alpha, \beta) \Rightarrow \Phi(\rho, \alpha, \beta) = 0$